Санкт-Петербургский государственный университет

Кассихин Илья Алексеевич

Выпускная квалификационная работа

Непрерывность множества инвариантных мер отображений перекладывания отрезков

Образовательная программа бакалавриат «Математика»
Направление и код: 01.03.01 «Математика»
Шифр ОП: СВ.5000.2017

Научный руководитель:
доктор
физико-математических наук,
доцент кафедры теории
вероятности и мататической
статистики СПбГУ
Крыжевич Сергей Геннадьевич

Рецензент:
доктор
физико-математических наук,
профессор,
профессор СПбГУ
Пилюгин Сергей Юрьевич

Санкт-Петербург
2021 год

1 Анотация

Исследуется множества инвариантных мер отображения перекладывания отрезков. Рассмотрим расстояние между множествами инвариантных мер, считая расстояние между мерами в метрике слабой сходимости, определяющей метрику Хаусдорфа на компактных подмножествах борелевских вероятностей. С использованием подхода установленным Ф. Такенсом показывается, что отображение ставящие в соответствие перекладывания отрезков множество его инвариантных мер непрерывно в зависимости от разбиения и является множеством второй категории по Беру.

2 Введение

Рассмотрим отображение сдвига отрезков (Interval Translation Maps). Это отображение является обобщением перекладывания отрезков (Interval Exchange Maps).

Такого рода отображения возникают в различных задачах, как в теории, так и на практике. Начиная от биллиардах в многоугольниках моделями поведения биржевого игрока. [KaHa99]

При этом численное моделирование отображения сдвигов отрезков представляет трудностями как впрочем, и модель любого разрывного отображения.

Результаты численного моделирования могут дать инвариантные меры, но не приближение индивидуальных траекторий. В связи с этим исследование зависимости множества инвариантных мер от параметра системы представляет значительный интерес.

В этой работы мы исследуем непрерывную зависимость множества инвариантных мер от параметров в метрике Хаусдорфа. Используя теорию Ф. Такенса [Takens71], мы покажем, что в пространстве параметров множество точек непрерывности "симплекса"инвариантных мер содержит множество второй категории по Беру.

3 Список обозначений

Λ_n - пространство разбиений единичного отрезка на n отрезков.

M - отрезок $[0;1]$.

π - перестановка n элементов.

$d_H(A, B)$ - метрика Хаусдорфа.

$Prob(A)$ - пространство борелевских вероятностных мер на A.

$C(A)$ - пространство, точки которого являются замкнутыми непустыми множествами A.

$B_\delta(x)$ - открытый шар с радиусом δ и центрам в x.

$T_{\alpha,\pi}$ - отображение перекладывания отрезков с параметрами α, π.

$\mu(\alpha, \pi)$ - множество инвариантных борелевских мер для отображения $T_{\alpha,\pi}$.

P - пространство вероятностных мер отрезков, так же P изоморфно Λ_n.

X - Подпространство Λ_n.

4 Основные понятия

Определение 4.1 (Перекладывание отрезков) *Пусть* $n \geq 1$. Λ_n *это множество векторов* $(a_1, \dots a_n) \in \mathbb{R}^n$, *такие что* $0 \leq a_i \leq 1$ *для всех* i *и* $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 1$, *также обозначим* $\alpha_i = \sum\limits_{j=1}^{i-1} a_j$ *Преобразование* $n-$*перекладывания отрезков задается вектором* $a \in \Lambda_n$ *и* $\pi \in S_n$. *Отображение* $T_{a,\pi}$ *это кусочно-линейное отображение, определяемое формулой разбиения интервала* $M = [0, 1]$ *на* n *подинтервалов длин* $a_1, \dots, a_n$ *и переставляя их согласно перестановке* π; *Или формальнее*

$$T_{a,\pi} x = x + \alpha_{\pi i} - \alpha_i, x \in [\alpha_i, \alpha_{i+1})$$

Иногда вместо n-мерного вектора a будет удобнее рассматривать $n+1$-мерный вектор α и наоборот. Заметим, что между a и α есть и биекция, будем обозначать $\alpha = \alpha(a)$ и $a = a(\alpha)$.

Хорошо известно, что для фиксированных a, π и неприводимого π пространство борелевских инвариантных вероятностных мер для отображения является компактом в *-слабой топологии.

Определение 4.2 (*-слабая топология) *Пусть* X *- топологическое пространство, а* $\mathcal{B}$ *-* σ*-алгебра. Обозначим через* $M^b(X, \mathcal{B})$ *- пространство* $\mathbb{R}$*-значных мер с конечной полной вариацией, это банахово пространство. Тогда* $M^b(X, \mathcal{B})$ *обладает *-слабой топологией на* $M^b(X, \mathcal{B})$, *если последовательность* $\mu_i, \mu_i \in M^b(X, \mathcal{B})$ *сходится к* μ *тогда и только и тогда, если для любой непрерывной фунцкии* $f : X \to \mathbb{R}$ *с компактным носителем, верно, что* $\int f d\mu_i \to \int f d\mu$.

Определение 4.3 (Метрика Канторовича-Рубинштейна) *Пусть* $Prob(X, \mathcal{B})$ *- пространство вероятностных мер на пространстве* X *с* σ*-алгеброй* $\mathcal{B}$, *тогда метрикой Канторовича-Рубинштейна*
$W(\mu, \nu) = \sup\{\int_X f(x) d(\mu - \nu)(x) | f : X \to \mathbb{R}$ *- непрерывное отображение и* $Lip(f) \leq 1\}$.

Известно, что метрика Канторовича-Рубинштейна задет *-слабую топологию на пространстве вероятностных мер.

Определение 4.4 (Метрика Хаусдорфа) *Между двумя компактами* A, B *и метрики* ρ *можно рассмотреть метрику Хаусдорфа*

$$d_H(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} d(a, b) \right\}$$

Обозначим пространство всех борелевских вероятностных мер на A за $Prob(A)$.

Определение 4.5 (Полунепрерывное отображение) *(A, p) - компактное метрическое пространство и X - топологическое пространство. $(C(A), d_H)$ - пространство с метрикой Хаусдорфа, точки которого являются замкнутые непустые подмножества A. Отображение $\psi : X \to C(A)$ - полунепрерывно сверху(снизу), если для любого $x \in X$ и $\delta > 0$ существует окрестность $W(x)$ в X, такое, что для любого $x' \in W(x), \psi(x') \subset B_\delta(\psi(x))$(соответсвенно $\psi(x) \subset B_\delta(\psi(x'))$)*

Теорема 4.1 (Такенса) *Пусть (A, ρ) компактное метрическое пространство, $(C(A), d_H)$ - метрическое пространство, точки которого компактные непустые подмножества A, с метрикой Хаусдорфа на них. X - топологическое пространство. Тогда если есть $\chi : X \to C(A)$ полунепрерывная сверху, тогда множество непрерывных точек ξ это остаточное множество для X.*

5 Непрерывности отображения инвариантных мер

Основной результат данной работы содержится в этой теореме.

Теорема 5.1 *Зафиксируем n и $\pi \in S_n$ - неприводимая перестановка. Рассмотрим отображение $\mu(\alpha, \pi)$ - это множество инвариантных борелевских мер для отображения $T_{\alpha,\pi}$. Тогда $T_{\alpha,\pi}$ непрерывно по α на множестве второй категории по Бэру в Λ_n.*

Для доказательства теоремы воспользуемся теоремой 4.1 сформулированной Ф. Такенса для полунепрерывных функций.

Значит для доказательства Теоремы 5.1 достаточно доказать, что $\mu(\alpha, \pi)$ полунепрерывная по $\alpha \in \Lambda_n$. Вместо Λ_n рассмотрим пространство $X \subset \Lambda_n$ - множество α, которое удовлетворяет условию Каена [Keane75]. X - метрическое топологическое пространство с такой же метрикой как и в Λ_n, так же не трудно заметить что X получается из Λ_n если убрать множество точек общей меры 0.

Определение 5.1 (Условие Каена) *Отображение перекладывания отрезков $T_{a,\pi}$ удовлетворяет условию Каена, если $T_{a,\pi}$-орбиты $\alpha_1, .., \alpha_n$ попарно различные и бесконечные. Известно, что если $T_{a,\pi}$ удовлетворяет условию Каена, то существует не более n взаимно сингулярных эргодических мер $T_{a,\pi}$.*

Вейх в своей работе доказал, что на самом деле существует не более $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ эргодических взаимно сингулярных мер [Veech78].

Дальнейший план доказательства такой: Построим отображение

$$\Sigma(\alpha, F) = h(\phi(\alpha, F))$$

В свою очередь по Σ построим $\psi(\alpha) = \mu(\alpha)$ и докажем его полунепрерывность.

Определение 5.2 *Метрическое пространство P - пространство векторов $(\beta_1, ..., \beta_n) \in \mathbb{R}^n$, таких, что $0 \le \beta_i \le 0$ для всех i и $\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i = 1$. P - будем называть пространство вероятностных мер отрезков. $\phi : X \times Prob(M) \to X \times P$,*

$$\phi(\alpha, F) = (\alpha, (F(\alpha_1, \alpha_2), ..., F(\alpha_n, \alpha_{n+1})))$$

Где F - борелевская вероятностная мера. Очевидно, что ϕ - непрерывное собственное отображение.

Определение 5.3 *Рассмотрим отображение $h : X \times P \to \mathbb{R}^+$ заданное следующим образом $h(\alpha, \beta) = \lim\limits_{i\to\infty} h_i(\alpha, \beta)$, где $h_i(\alpha, \beta)$ вычисляется алгоритмом 5*

Algorithm 1 Вычисление $h_i(\alpha, \beta)$ при перестановки π

$a \leftarrow a(\alpha)$ //В данном случаи воспринимаем a как n-мерный вектор
$i \leftarrow i$
$\pi \leftarrow \pi$
$\xi_i \leftarrow a$
$\mu_0 \leftarrow \beta$
for $j = 1, 2 \dots i$ **do**
  $\sigma \leftarrow$ перестановка отрезков ξ_{j-1} при преобразование $T_{\alpha,\pi}$
  $ImT\xi_{j-1} \leftarrow$ пустой список
  $ImT\mu_{j-1} \leftarrow$ пустой список
  for $k = 1, 2 \dots len(\xi_{j-1})$ **do**
    Добавим в конец $ImT\xi_{j-1}$ элемент $\xi_{j-1}[\sigma^{-1}(k)]$
    Добавим в конец $ImT\mu_{j-1}$ элемент $\mu_{j-1}[\sigma^{-1}(k)]$
  end for
  $\mu_j \leftarrow$ пустой список
  $\xi_j \leftarrow$ пустой список
  while ξ_{j-1} или $ImT\xi_{j-1}$ не пусто **do**
    if $\xi_{j-1}[1] < ImT\xi_{j-1}[1]$ **then**
      Добавим в конец ξ_j элемент $ImT\xi_{j-1}[1]$
      Добавим в конец μ_j элемент $ImT\mu_{j-1}[1]$
      $\xi_{j-1}[1] \leftarrow \xi_{j-1}[1] - ImT\xi_{j-1}[1]$
      $\mu_{j-1}[1] \leftarrow \mu_{j-1}[1] - ImT\mu_{j-1}[1]$
      Удаляем из $ImT\xi_{j-1}$ первый элемент
      Удаляем из $ImT\mu_{j-1}$ первый элемент
    else if $\xi_{j-1}[1] < ImT\xi_{j-1}[1]$ **then**
      Добавим в конец ξ_j элемент $\xi_{j-1}[1]$
      Добавим в конец μ_j элемент $\mu_{j-1}[1]$

Algorithm 2 Вычисление $h_i(\alpha, \beta)$ при перестановки π

$ImT\xi_{j-1}[1] \leftarrow ImT\xi_{j-1}[1] - \xi_{j-1}[1]$
$ImT\mu_{j-1}[1] \leftarrow ImT\mu_{j-1}[1] - \mu_{j-1}[1]$
Удаляем из ξ_{j-1} первый элемент
Удаляем из μ_{j-1} первый элемент
else//Из-за того что выполнено условие Каена .
такой случай возможен $\Leftrightarrow len(\xi_{j-1}) = len(ImT\xi_{j-1}) = 1$
if $\mu_{j-1}[1] == ImT\mu_{j-1}[1]$ **then**
Добавим в конец ξ_j элемент $\xi_{j-1}[1]$
Добавим в конец μ_j элемент $\mu_{j-1}[1]$
else
Добавим в конец ξ_j элемент $\xi_{j-1}[1]$
Добавим в конец μ_j элемент $-abs(\mu_{j-1}[1] - ImT\mu_{j-1}[1])$
end if
$ImT\xi_{j-1} \leftarrow$ пустой список
$ImT\mu_{j-1} \leftarrow$ пустой список
$\xi_{j-1} \leftarrow$ пустой список
$\mu_{j-1} \leftarrow$ пустой список
end if
end while
for $k = 1, 2 \ldots len(\xi_j)$ **do**
if $\mu_j[k] < 0$ **then**
RETURN $min(\xi_j)$
end if
end for
end for
RETURN $min(\xi_i)$

Заметим некоторые факты про алгоритм. Если β являлась образом какой-либо инвариантной меры при преобразовании ϕ, то $h(\alpha,\beta)=0$, иначе $h(\alpha,\beta)>0$. Известно, что $\lim\limits_{i\to\infty} max(\xi_i)=0$, и алгоритмом 5 можно приближать инвариантную вероятностную меру. Помимо этого заметим, что если во время выполнения алгоритма какое-то $\mu_i[j]=0$, то верно, что для какого-нибудь $k>i$ существует $t : mu-k[t]<0$, иначе можно приблизить инвариантную меру, такую что на каком-то отрезке она ровна 0, но такого быть не может, тогда эта мера везде ровна 0, очевидна, что такая мера не является вероятностной.

Лемма 5.1 *Зафиксируем $\delta>0$. Если $h(\alpha,\beta)=0$, то существует окрестность $W_\delta(\alpha,\beta)\subset X\times P$ и окрестности $W_\delta(\alpha)\subset X$, $W_\delta(\beta)\subset P$: $W_\delta(\alpha,\beta)=W_\delta(\alpha)\times W_\delta(\beta)$ и для любых$(\alpha',\beta')\in W_\delta(\alpha,\beta)$ $h(\alpha',\beta')\le\delta$. Причем существует окрестность $U_\delta(\alpha)\subset X$, такое, что для любого $\alpha'\in U_\delta(\alpha)$ $\alpha\in W_\delta(\alpha')$ и $\alpha'\in W_\delta(\alpha)$.*

Доказательство: $h(\alpha,\beta)=0$. Тогда найдется такое минимальное i, что максимальная длина в разбиение $\xi_i(\alpha,\beta)\le\delta$. Пусть k - минимальная длина интервала в разбиение $\xi_i(\alpha,\beta)$. Заметим, что в μ_i ни одна мера интервала не может быть 0, иначе мера всего единичного отрезка 0. Пусть m - минимальная мера в μ_i. Убедимся, что можно рассмотреть следующие окрестности $W_\delta(\alpha)=\prod\limits_j(\alpha_j-\frac{k}{2^{i+1}};\alpha_j+\frac{k}{2^{i+1}})$ и $W_\delta(\beta)=\prod\limits_j(\beta_j-\frac{m}{2^{i+1}};\beta_j+\frac{m}{2^{i+1}})$.

Докажем по индукции такой факт для любой пары$(\alpha',\beta')\in W_\delta(\alpha,\beta)$ и $l\le i$ верно $|T^l_{\alpha,\pi}(\alpha_j)-T^l_{\alpha',\pi}(\alpha'_j)|\le\frac{k}{2^{i+1-l}}$ и $|\mu_{l,t}(\alpha',\beta')-\mu_{l,t}(\alpha,\beta)|\le\frac{m}{2^{i+1-l}}$.

База: $l=1$. Можно заметить, что начальные условия и есть условия индукции, для $l=1$.

Переход: $l\Rightarrow l+1$.

Пусть $T^l_{\alpha,\pi}(\alpha_j)\in[\alpha_a;\alpha_{a+1})$, тогда и $T^l_{\alpha',\pi}(\alpha'_j)\in[\alpha'_a;\alpha'_{a+1})$ Из-за того что k - минимальная длина интервала для ξ_i границы полуинтервалов $T^l_{\alpha,\pi}([\alpha_a;\alpha_{a+1}))$ и $T^l_{\alpha',\pi}([\alpha'_a;\alpha'_{a+1}))$ отличаются не более чем на $\frac{k}{2^i}$, а значит не более чем на $\frac{k}{2^{i+1-l}}+\frac{k}{2^i}\le\frac{k}{2^{i+1-l-1}}$. По аналогичным причинам для μ так же.

Заметим, что $W_\delta(\alpha)$ зависит только от α.

Поймем, что существует $U_\delta(\alpha)$. Обозначим $i^0=i,k^0=k$ по ним построим i^1,i^2 и k^1,k^2

$$i^1=i_{\frac{k^0}{4}}(\alpha),k^1=i_{\frac{k^0}{4}}(\alpha)$$

$$i^2=i_{\frac{k^1}{4}}(\alpha),k^2=i_{\frac{k^1}{4}}(\alpha)$$

$$i^3=i_{\frac{k^2}{4}}(\alpha),k^3=i_{\frac{k^2}{4}}(\alpha)$$

Тогда можно взять $U_\delta(\alpha)=W_{\frac{k^2}{4}}(\alpha)$.

Для $i^0<i^1<i^2<i^3$, а так же для любого $\alpha'\in W_{\frac{k^2}{4}}(\alpha)$ и $l\le i^2$ верно

$$|T^l_{\alpha,\pi}(\alpha_j)-T^l_{\alpha',\pi}(\alpha'_j)|\le\frac{k_{\frac{k^2}{4}}(\alpha)}{2^{i^3+1-l}}\le\frac{\frac{k^2}{4}}{2^{i^3+1-l}}$$

Следовательно

$$|\xi_l(\alpha)-\xi_l(\alpha')| \le 2*\frac{\frac{k^2}{4}}{2^{i^3+1-l}} \le \frac{\frac{k^2}{2}}{2^{i^3+1-l}} \le \frac{\frac{k^2}{2}}{2^{i^2+1-l}}$$

Заметим, что $i_\delta(\alpha') \le i^1$, так как

$$\delta \ge \frac{k^0}{2} \ge \frac{k^0}{4}+\frac{k^2}{2} \ge max(\xi_{i^1}(\alpha'))+\frac{k^2}{2} \ge max(\xi_{i^1}(\alpha'))$$

.

$$\frac{k^2}{4} \le \frac{k^1}{2} \le k^1-\frac{k^2}{2} \le min(\xi_{i^1}(\alpha'))$$

Из-за того, что $U_\delta(\alpha)$ отличается от α покоординатно не более чем на $\frac{k^3}{2^{i^3+1}} \le \frac{\frac{k^2}{4}}{2^{i^1+1}}$ в каждой координате, а в окрестности $W_\delta(\alpha')$ координаты отличаются не более чем на $\frac{k_\delta(\alpha')}{2^{i_\delta(\alpha)+1}} \ge \frac{\frac{k^2}{4}}{2^{i^1+1}}$, то и $\alpha \in W_\delta(\alpha')$.

■

Лемма 5.2 *Зафиксируем $0<\delta<1$. Если $h(\alpha,\beta)=\varepsilon$, то существует окрестность $W_\delta(\alpha,\beta)\subset X\times P$ и окрестности $W_\delta(\alpha)\subset X$, $W_\delta(\beta)\subset P$: $W_\delta(\alpha,\beta)=W_\delta(\alpha)\times W_\delta(\beta)$ и для любой пары $(\alpha',\beta')\in W_\delta(\alpha,\beta)$ $h(\alpha',\beta')\ge\varepsilon-\delta$.*

Доказательство: Заметим, что $h(\alpha,\beta)=\varepsilon$. Тогда найдется такой минимальный i, что минимальная длина в разбиение $\xi_i(\alpha,\beta)=\varepsilon$ и есть отрицательная мера отрезка. Пусть $-m$ - минимальная мера в μ_i. Убедимся, что можно рассмотреть следующие окрестности $W_\delta(\alpha)=\prod\limits_j(\alpha_j-\frac{\varepsilon*\delta}{2^{i+1}};\alpha_j+\frac{\varepsilon*\delta}{2^{i+1}})$ и $W_\delta(\beta)=\prod\limits_j(\beta_j-\frac{m}{2^{i+1}};\beta_j+\frac{m}{2^{i+1}})$.

Докажем по индукции такой факт, что для любой пары $(\alpha',\beta')\in W_\delta(\alpha,\beta)$ и $l\le i$ верно, что $|T^l_{\alpha,\pi}(\alpha_j)-T^l_{\alpha',\pi}(\alpha'_j)|\le\frac{\varepsilon*\delta}{2^{i+1-l}}$ и $|\mu_{l,t}(\alpha',\beta')-\mu_{l,t}(\alpha,\beta)|\le\frac{m}{2^{i+1-l}}$.

Доказательство в точности повторяет доказательство леммы 5.1. Однако, в лемме 5.1 речь шла только о положительных величинах. В данном случаи может быть $l<i$, такой что в $\mu_l(\alpha,\beta)$ может быть нулевая мера, поэтому для (α',β') может быть такое, что существует $k<i$ такой, что в $\mu_k(\alpha',\beta')$ может быть отрицательная мера отрезка, но тогда минимальный по длине отрезок для разбиения $\xi_k(\alpha',\beta')\ge$ минимальный по длине отрезок для разбиения $\xi_i(\alpha,\beta)$, а оно в свою очередь уже отличается от ε не более чем на δ. ■

Теорема 5.2 *Рассмотрим функцию $\psi: X\to C(Prob(M))$, определную следующим образом:*

$$\psi(\alpha)=\{F\in Prob(M):\Sigma(\alpha,F)=0\}$$

Тогда ψ полунепрерывна сверху.

Доказательство: $\psi(\alpha) = \{F \in Prob(M) : h(\phi(\alpha, F)) = 0\}$. Можно воспринимать, как $\psi_P(\alpha) = \{\beta \in P : h(\alpha, \beta) = 0\}$ так как биекция из $\psi_P(\alpha)$ в $\psi(\alpha)$.

Зафиксируем $0 < \delta < d_H(\psi_P(\alpha), \partial P)$ и $\alpha \in X$. Тогда существует $\varepsilon > 0$, такой что для любого $\beta \in P$ если $\beta \notin B_\delta(\psi_P(\alpha))$, то $h(\alpha, \beta) > \varepsilon$.

Рассмотрим такое покрытие компакта P. Для каждого $\beta \in P$, удовлетворяющего $h(\alpha, \beta) > 0$ возьмем окрестность $W_{h(\alpha,\beta)/2}(\beta)$ из леммы 5.2(то есть если $(\alpha, \beta') \in W_{h(\alpha,\beta)/2}(\beta)$, то $h(\alpha, \beta') > h(\alpha, \beta)/2$), а так же $B_\delta(\psi_P(\alpha))$. Тогда из-за того что P - компакт, существует конечное покрытие, причем это покрытие всегда содержит $B_\delta(\psi_P(\alpha))$(т.к. множество инвариантных мер не пусто), а в остальных элементах покрытия величина $h(\alpha, \beta)$ ограничена снизу. минимум из этих ограничений и есть ε.

Рассмотрим $W_{\min(\delta,\varepsilon)}(\alpha)$ из леммы 5.1. Пусть $(\alpha', \beta') \in W_{\min(\delta,\varepsilon)}(\alpha)$, тогда если $h(\alpha', \beta') = 0$, то $h(\alpha, \beta') < \min(\delta, \varepsilon) \le \varepsilon$. А значит $\beta' \in B_\delta(\psi_P(\alpha))$.

Следовательно если $\alpha' \in W_{\min(\delta,\varepsilon)}(\alpha)$, то $\psi_P(\alpha') \in B_\delta(\psi_P(\alpha))$.

Из-за того что отображение биекции между $\alpha \times \psi_P(\alpha)$ и $\alpha \times \psi(\alpha)$ непрерывно и замкнуто, то теорема доказана. ■

6 Заключение

Таким образом множество инвариантных мер для отображения перекладывания отрезков как функция параметров отображение полунепрерывна сверху, и непрерывна на множестве второй категории по Беру.

Это означает, что инвариантные меры, полученные путем числового моделирования(с погрешностями) будут отвечать множеству инвариантных мер исходного отображения.

7 Дальнейшее исследование

Ещё одна интересная задача, в которой можно применить данный метод доказательства.

Рассмотрим отображение сдвига отрезков(ITM).

Определение 7.1 *Для разбиения $T_{\alpha,\beta}$, где $n \in \mathbb{N}, \alpha \in \Lambda_n$, $\beta \in \mathbb{R}^n$ и $T_{\alpha,\beta}$ отображение из $M = [0; 1]$ в $M = [0; 1]$ устроенное таким образом: $T_{\alpha,\beta}x = x - \alpha_i + \beta_i, x \in [\alpha_i; \alpha_{i+1})$.*

Назовем $K_{\alpha,\beta} = \cap\overline{T^k_{\alpha,\beta}(M)}$ - "аттрактором". Это счетное пересечение компактов, а значит компакт. И соответственно можно рассмотреть $K_{\alpha,\beta}$ как отображение в пространство компактов из множество параметров. Используя такую же технику можно доказать, что это отображение почти везде полунепрерывно сверху.

Список литературы

[KaHa99] Каток А.Б., Хасселблат Б.: Введение в современную теорию динамических систем. 472-484 (1999)

[Veech78] W. A. Veech: Interval exchange transformations. J. d'Analyse Mathématique volume 33 222–272 (1978).

[Takens71] Takens F.: On Zeeman's tolerance stability conjecture, Manifolds-Amsterdam 1970, Lecture Notes in Math., Springer, 197 (1971), 209–219.

[Keane75] Keane M. (1975), "Interval exchange transformations Mathematische Zeitschrift volume 141, 25–31 (1975)